

誘電体球状共振器を用いたミリ波帯における 複素比誘電率の測定法

A measurement method for the complex directed the permittivity
by a directed Spherical Resonator in the millimeter wave band

松原 真理*, 苫米地 義郎*

MATSUBARA Mari* and TOMABECHI Yoshiro*

We have developed a new method for evaluating a complex permittivity of a dielectric material by using Whispering Gallery Mode on a spherical dielectric resonator. As eigenvalue equations of the spherical resonator can be derived correctly without any approximations, we can expect a precise evaluation of the complex permittivity. In our estimation, the Newton method is used. Not only numerical resonance frequencies and unloaded quality factors derived from the eigenvalue equation but also these resulted from our experiments in millimeter wave region are substituted into the Newton method formula. We have also iterated the formula to converge the complex permittivity of the dielectric materials. Comparing our complex permittivity with a conventional value, it shows good agreements each other.

1. まえがき

近年の情報化社会の発展と共に、従来から利用されているマイクロ波帯での周波数資源が不足してきている。そこで、効率よく電波を利用するために様々な対策が検討されており、このひとつに、未使用周波数帯域であるミリ波帯域（30～300 [GHz]）の利用が期待されている。ミリ波帯は既存の周波数帯よりも高周波であるため、光に似た性質を持ち、雨や霧の影響を受けやすいが、情報の大容量伝送を可能にするなど大きな潜在的可能性を有している。

ミリ波帯で用いられる回路素子の開発の際、誘電体材料の複素比誘電率を正確に把握することは非常に重要であり、様々な研究が行われている。現在、材料の比誘電率測定法はマイクロ波帯での空洞共振器法等^[1]がある。しかし、金属導体を用いているためそれ自身での損失が大きくなり、ミリ波帯での複素比誘電率の測定が困難になってしまう。そこで金属を用いないウィスパーリングギャラリーモ

*宇都宮大学 教育学部

ード（WGモード）共振器を用いて、複素比誘電率の測定に関する研究を行う。

WGモード共振器とは、共振器の周に沿って進行する電磁波が、一周して戻ってきた時の位相差が $2n\pi$ （ n は整数で共振次数という）の整数倍になった時に共振するモードのことを言う。この共振器を用いた測定法は共振周波数と無負荷Q値の理論値と実験値から複素比誘電率を求める方法で、従来の共振法と比較して高い測定精度が得られる。しかし、円板という形ゆえエッジ部でのエネルギーの放射があり、固有値方程式を求める際に近似を含まなければならないため、厳密解を得ることが非常に困難である^[2]。そのため、周波数の適用範囲が制限されてしまう。

そこで本研究ではWGモード誘電体球状共振器を誘電体材料の複素比誘電率測定に利用することを提案してきた^{[3]~[5]}。まずWGモード誘電体球状共振器の固有値方程式を導出したところ、近似を一切含まず、簡単な形になることが分かった。また得られた理論共振特性（共振周波数、無負荷Q値）と実験から得られる値を比較すると両者は互いに良く一致することが分かった^[3]。次にこの共振器を用いて、カーブフィッティング法を用い複素比誘電率の推定を一部行なっている^[4]。しかし、周期的に現れる複数のWGモードの共振周波数および無負荷Qを、誘電率を少しずつ変化させたときの共振周波数／無負荷Qの計算結果と比較し誘電率を推定する、という煩雑な手順を用いていたため、誘電率の測定値を得るのに多くの時間・手間を要した。そこで、一組の共振周波数と無負荷Qの測定値から、ニュートン法を用いて複素誘電率を算定するソフトウェアを開発し、効率よく球状誘電体の誘電率測定を行うためのシステムを開発した^[5]。本論文では、本測定法の更なる検証を行うために、材質が同じで半径だけが異なる複数の試料に対する測定を行った。半径の大小にかかわらず、複素比誘電率の実数部は、概ね一定値となり、虚数部は若干の変動があるものの、両者とも従来の方法で得られる値とほぼ一致することが分かった。

2. 球状共振器の固有値方程式

図1に球状共振器と球座標系を示す。球の半径を a 、共振器内部及び周囲媒質は均一で等方性とし、それぞれの比誘電率を ϵ_r ($\epsilon_r' - j\epsilon_r''$)、 ϵ_1 とする。WGモード誘電体球状共振器にはTEモードとTMモードの2つの共振モードが存在する。TEモードとは電界の r 方向成分が存在しない共振モードで、TMモードは磁界の r 方向成分が存在しない共振モードのことを言う。まず球座標系を用いてスカラー波動方程式^[6]を展開し、共振器内部（ $0 < r \leq a$ ）と周囲媒質（ $a < r$ ）での電磁界表示式を求める。次に境界（ $r=a$ ）で電磁界の接線成分が連続であるという条件を用いるが、球状の場合、これまで取り扱ってきた円板共振器と異なりエッジが無い場合電磁界解析には近似を含まない。

TE, TMモードそれぞれの固有値方程式は次のように導出される^[5].

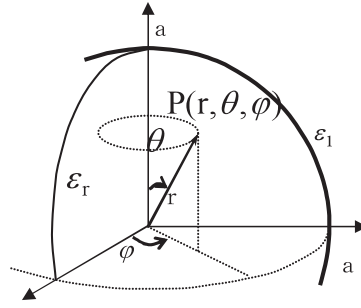


図1 球状共振器と球座標系

Fig.1 A spherical dielectric resonator and its coordinate.

$$\text{TE モード} ; -k_l \cdot j_n \cdot h_n^{(2)} + k_r \cdot j_n' \cdot h_n^{(2)} = 0 \quad (1)$$

$$\text{TM モード} ; \epsilon_r \cdot j_n \left\{ h_n^{(2)} + k_l \cdot a \cdot h_n^{(2)} \right\} - \epsilon_l \cdot h_n^{(2)} \left\{ j_n + k_r \cdot a \cdot j_n' \right\} = 0 \quad (2)$$

ここで

$$j_n = j_n(k_l a), \quad j_n' = \frac{\partial}{\partial(k_l r)} \left\{ j_n(k_l r) \right\} \Big|_{r=a}, \quad h_n^{(2)} = h_n^{(2)}(k_l a),$$

$$h_n^{(2)} = \frac{\partial}{\partial(k_l r)} \left\{ h_n^{(2)}(k_l r) \right\} \Big|_{r=a}, \quad k_l = \omega \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}, \quad k_l = \omega \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_l}, \quad \omega = 2\pi(f_{\text{real}} + jf_{\text{imag}}) \quad (3)$$

である.

$j_n(k_l r)$ は球ベッセル関数, $h_n^{(2)}(k_l a)$ は第二種球ハンケル関数である. またこれらの関数の次数 n は共振時には整数となり, この n を Φ 方向共振次数と呼ぶ.

TEモードの複素共振周波数は, (1) 式と (3) 式, TMモードのそれは, (2) 式と (3) 式に, 球の半径 a と複素比誘電率 ϵ_r , Φ 方向共振次数 n を代入することにより得られる.

3. 本測定法

前節で示した固有値方程式から得られる理論複素共振周波数 f ($=f_{\text{real}} + jf_{\text{imag}}$) と, 測定から得られる実験的複素共振周波数 F (F_{real} 及び F_{imag}) が一致するような ϵ_r' , ϵ_r'' を求める. その為に以下のような評価式を用いたニュートン法を適用する^[8].

$$\begin{pmatrix} \epsilon_r'^{(k+1)} \\ \epsilon_r''^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_r'^{(k)} \\ \epsilon_r''^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{\text{real}}^{(k)}}{\partial \epsilon_r'} & \frac{\partial f_{\text{real}}^{(k)}}{\partial \epsilon_r''} \\ \frac{\partial f_{\text{imag}}^{(k)}}{\partial \epsilon_r'} & \frac{\partial f_{\text{imag}}^{(k)}}{\partial \epsilon_r''} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_{\text{real}}^{(k)} - F_{\text{real}} \\ f_{\text{imag}}^{(k)} - F_{\text{imag}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中の上付き添字 k は試行回数を示す. $f_{\text{real}}^{(k)}$, $f_{\text{imag}}^{(k)}$ はそれぞれ, (1), (2)式に $\epsilon_r'^{(k)}$, $\epsilon_r''^{(k)}$ を代入して得られる理論複素共振周波数である.

なお実験的複素共振周波数は共振周波数と無負荷 Q 値の測定値 F , Q_u から次の関係式を用いるこ

とにより導出される．ただし共振次数 n を既知にするためには電磁界分布の測定が別途必要となる^[6]．

$$F = \left| F_{\text{real}} + jF_{\text{imag}} \right| \quad (5)$$

$$Q_u = \frac{F}{2 \cdot F_{\text{imag}}} \quad (6)$$

また実際に式(4)を適用するにあたり， $\frac{\partial f_{\text{real}}^{(k)}}{\partial \epsilon_r'}$ 等の微分演算の値は，中間差分による数値微分により求めた．以下に本算出法の手順を述べる．

(Ⅰ) 複素比誘電率の初期値 $\epsilon_r'^{(1)}$, $\epsilon_r''^{(1)}$ を設定する．

(Ⅱ) $\epsilon_r'^{(1)}$, $\epsilon_r''^{(1)}$ を固有値方程式(1)または(2)式に代入し，これらの方程式を満足する複素共振周波数 $f_{\text{real}}^{(1)} + j f_{\text{imag}}^{(1)}$ を求める．

(Ⅲ) 得られた $f_{\text{real}}^{(1)}$, $f_{\text{imag}}^{(1)}$ を(4)式に代入し $\epsilon_r'^{(2)}$, $\epsilon_r''^{(2)}$ を求める．

(Ⅳ) $\epsilon_r'^{(1)}$, $\epsilon_r''^{(1)}$ を $\epsilon_r'^{(2)}$, $\epsilon_r''^{(2)}$ と置き換えて手順 (Ⅱ) に戻る．

この手順を繰り返し， $\epsilon_r'^{(k)}$, $\epsilon_r''^{(k)}$ を順次求める． $\epsilon_r'^{(k)}$, $\epsilon_r''^{(k)}$ と $\epsilon_r'^{(k+1)}$, $\epsilon_r''^{(k+1)}$ が非常に近くなった時，この値を誘電体の複素比誘電率とする．

このニュートン法を用いる際に注意することは，手順 (Ⅰ) での初期値の設定である．すなわち，初期値としてかなり大きな数値を選択すると，共振次数 n や，球の半径が同じでも，付録中の固有値方程式は高次モードの複素共振周波数を計算する可能性が出てくる（ここでいう高次モードとは，球の $\theta = 90^\circ$ 平面内において電磁界の Φ 或いは θ 方向成分が r 軸方向に沿って2つ以上の極値を持つモードである）．そこで本測定法において，比誘電率の初期値としては，周囲媒質の比誘電率（1.0）より少し大きい値を用いるべきである．

4. 球状共振器の共振特性

本節では前節で述べた， F_{real} 及び F_{imag} を求めるための共振周波数及び無負荷 Q 値の実験について述べる．

共振周波数の測定回路を図2に示す．球状共振器の近傍に方形誘電体導波路を配置する．ここで球状共振器及び導波路は発泡スチロールで支持され高精度XYZステージ上に設置される． θ 方向に関する基本モードだけを励振するために， $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0, \pi$ (図1参照) の位置に誘電体導波路が配置されるようXYZステージで調整する．ここで方形導波路は球状共振器と同じ材質のもので，その断面寸法は， Φ 球状共振器の方向位相定数とほぼ一致させる(半径60mm，PTFE材の球状共振器の場合，導波路の断面が一辺7mmの正方形の導波路を用いる)と r 方向に関する高次モードの励振を抑えることができる．また共振特性を実験的に得るのに先立ち，金属導波管端部から共振器の励振部までの距離の2倍の長さを持つ方形誘電体導波路で，入出力導波管部を直結した回路を基準回路とし， S_{21} のキ

ャリブレーションを取った。

発振器から出力された電磁波は、増幅され励振用導波路を介し、球状共振器を励振する。透過電力は検出用導波路を通りスカラネットワークアナライザのディスプレイ上に表示される。TEモードを励振する場合、金属導波管の TE_{10} モードの電界の偏波方向が θ 方向（ $\theta = \pi/2$ ）となるように金属導波管を配置する。またTMモードを励振する場合は金属導波管を 90° 回転させる。

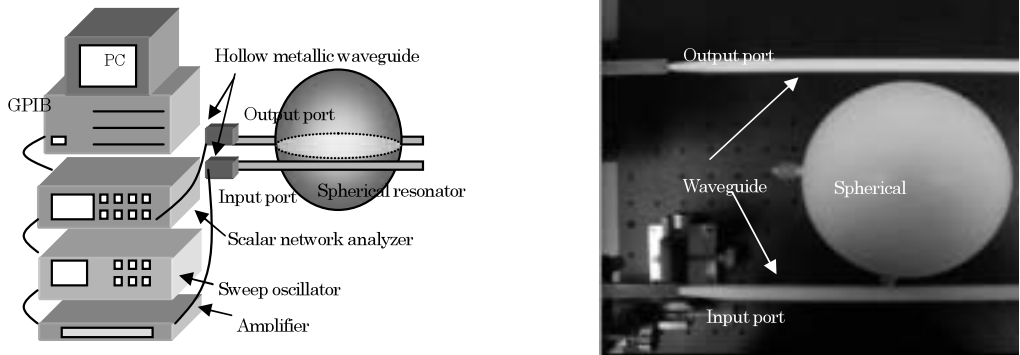


図2 実験回路

Fig.2 An experimental set up.

半径の異なる数種のPTFE（テフロン）球について、26GHz～40GHzの範囲で周波数を掃引し、透過電力を測定した結果を図3に示す。横軸は Φ 方向共振次数 n であり、別途共振器近傍の電磁界分布を別途測定することにより得られる^[5]。

無負荷 Q 値は、図2の測定回路を用い共振周波数近傍で周波数掃引法により測定する。またこの際、球状共振器と入出力導波路をある程度離し、共振時の電力透過率が -25dB 以下となるような疎結合状態にする。このような励振状態の微調整には、高精度XYZステージが効力を発揮し、測定の再現性も向上する。

これらの実験から得られた共振特性を図に示す。横軸が共振次数、図3の縦軸が共振周波数、図4の縦軸が無負荷 Q 値である。また半径45mmの球のTEモードでの結果を◆に、TMモードの結果を◇に示している。同様に半径60mmの球のTEモードでの結果を▲、TMモードの結果を△に示している。

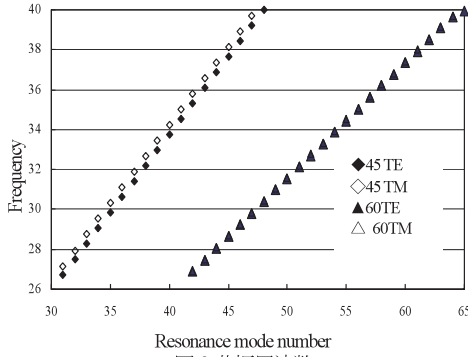


図3.共振周波数
Fig.3 Relation between mode number and frequency

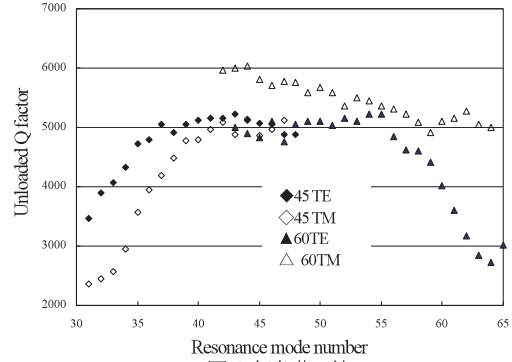


図4 無負荷Q値
Fig.4 Relation between mode number and unloaded Q factor

共振周波数は共振次数と共に増加する．P T F E 球の場合，半径が同じ球ならば，T M モードの方がT E モードの共振周波数より若干高くなる．また，半径が大きくなるほど共振周波数間隔が広くなる．

無負荷Q値は共振次数41程度までは増加するが，それ以降一定の値5000程度に収束する．共振周波数（共振次数）が高くなると電磁エネルギーの大部分が共振器の中に閉じこめられ放射による損失が非常に小さくなり，無負荷Q値は主に誘電体材料の $\tan \delta$ の値に依存するようになる．そしてその値は $1/\tan \delta$ に漸近するものと考えられる．なお，半径60mmの球のT M モードの結果だけ，共振次数が55より大きな範囲で無負荷Q値の値が下がってくる．これは，高次モードの影響であると考えられる．

5. 数値計算

以上の結果を用い，実際に誘電体材料の複素比誘電率を求めていく．

例として3節で用いた半径45mmの球状共振器でT E モード，共振次数 $n = 45$ の場合を考える．図3，図4より，共振周波数 F は37.55GHz，無負荷Q値 Q_u は5070である．これを（5），（6）式に代入すると $F_{\text{real}} = 3.76 \times 10^{11}$ ， $F_{\text{imag}} = 3.71 \times 10^8$ となる．

次に複素比誘電率の初期値を設定する．本解析では実数部の初期値 $\epsilon_r^{(1)}$ を周囲媒質（空気）の比誘電率にはほぼ等しい1.01とした．虚数部 $\epsilon_r^{\prime\prime(1)}$ は $\epsilon_r^{\prime\prime(1)} = \epsilon_r^{\prime(1)} / Q_u$ の関係より 1.97×10^{-4} とした．

これらの値を付録（1），（3）式に代入し $f_{\text{real}}^{(1)}$ ， $f_{\text{imag}}^{(1)}$ を求める．さらに（4）式に代入すれば， $\epsilon_r^{\prime(2)} = 1.497$ ， $\epsilon_r^{\prime\prime(2)} = 0.236$ が求まる．この $\epsilon_r^{\prime(2)}$ ， $\epsilon_r^{\prime\prime(2)}$ を用いて $f_{\text{real}}^{(2)}$ ， $f_{\text{imag}}^{(2)}$ を求めれば， $\epsilon_r^{\prime(3)} = 1.990$ ， $\epsilon_r^{\prime\prime(3)} = 1.170 \times 10^{-2}$ が求まる．同様の手順で $\epsilon_r^{\prime(4)}$ ， $\epsilon_r^{\prime\prime(4)}$ ， $\epsilon_r^{\prime(5)}$ ， $\epsilon_r^{\prime\prime(5)}$ ・・・ $\epsilon_r^{\prime(k)}$ ， $\epsilon_r^{\prime\prime(k)}$ を順次求める．それにより，実数部は2.06，虚数部は 4.18×10^{-4} に収束していることが分かる．よって，半径45mm,T E モード， $n=45$ の複素比誘電率は， $2.06 - j 4.18 \times 10^{-4}$ となる．

同様の手順で、3節の実験結果を用いて他の半径、モード、共振次数 n の複素比誘電率を計算した。なおこれらの図では横軸を周波数としている。さらに縦軸を図5では比誘電率、図6では $\tan \delta$ で表記している。○は半径60mmの球でTMモードの結果、●はTEモードの結果である。△は半径45mm、TMモードの結果で、比較のため先ほど示したTEモードの結果を▲で示している。

図5では、全ての比誘電率の値が1%以内に収まっている。すなわち本研究で取り扱った範囲では比誘電率の算定結果は、周波数にも、球状共振器の半径にも、励振モードにも依存しないことを確認できた。

一方図6の $\tan \delta$ は、33~36GHzの範囲で励振モードや半径にかかわらず±5%の範囲で同じ値になっている。共振周波数が低い場合、特に45mmの球状共振器でTEモードとTMモードでの差が大きくなっている。この原因として放射の影響が考えられる。また共振周波数が36GHzより高い周波数で、半径60mm、TEモードの算定値だけが他の算定値と大きく離れた値となっている。これは前述した高次モードの影響である。

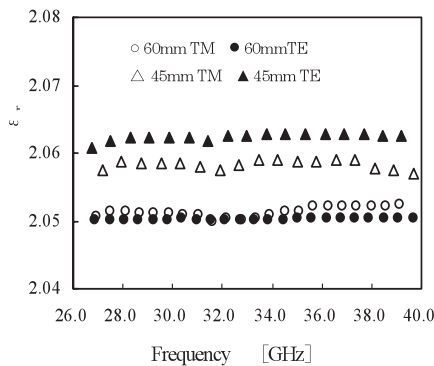


図5 PTFE 球の比誘電率の計算結果

Fig.5 Calculated results of the permittivity for

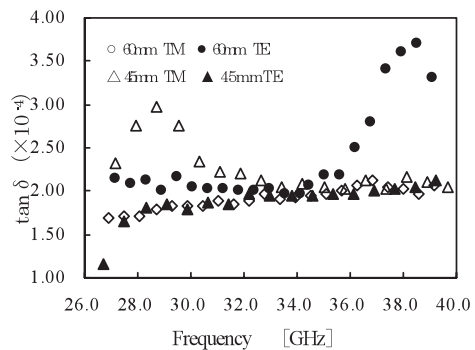


図6 PTFE 球の $\tan \delta$ の計算結果

Fig.6 Calculated results of the $\tan \delta$ for
TM and TE modes on spherical PTFE

これらの結果より、複素比誘電率の虚数部を正確に求めるには、周波数範囲（共振次数 n ）を適正に選ぶ必要がある。さらに無負荷 Q 値を正確に測定する必要があると考えられる。今回、励振・検出用導波路の配置場所により結合状態が変わり、 Q 値の測定のばらつきが数%程度あることが分かった。よって今後は、無負荷 Q 値の測定精度を向上させるため、励振機構をさらに改善する予定である。また、無負荷 Q 値を測定しやすい半径（規格化半径）について考慮していく予定である。

6. むすび

本論文では、WGモード誘電体球状共振器を用いて、ミリ波帯における誘電体材料の複素比誘電率を測定する方法を示した。誘電体球状共振器の固有値方程式は、近似を全く含まないため、厳密な

数値解析が行える利点がある．ニュートン法を適用した複素誘電率測定プログラムにより，共振周波数と無負荷 Q の実験値から複素誘電率が算定される．複素比誘電率の実数部は，共振次数や球状共振器の半径，励振モードに関わらず，一定の値が得られることが分かった．ただし，共振次数が小さい（周波数が低い）場合には，放射損の影響が大きくなり，無負荷 Q が大幅に低下するので励振効率が低下する．逆に共振次数が大きすぎる（周波数が高い）場合には，共振電磁界が誘電体内部に集中し，励振線路との結合が取りにくくなる．すなわち，無負荷 Q を適切に測定できる周波数範囲は限られており，そこから外れると，特に複素比誘電率虚数部の測定結果にばらつきがでてしまう．

測定に適切な共振次数の範囲を理論的に見積もること，無負荷 Q 値の測定をより向上するための励振機構の改善することなどが今後の課題として残るが，今回の結果により本測定法は，ミリ波帯における誘電体材料評価法として有望であることが示された．

7. 参考文献

- [1] 小林禱夫；“誘電体共振器とフィルタ入門講座”，講演会資料，(1989)
- [2] 田村先，古神義則，松村和仁：“ウィスパリングギャラリーモード共振器を用いたミリ波複素誘電率測定法の精度に関する検討”，電子情報通信学会論文誌（C），vol.J86-C，no.2，pp.147 -154，(2003)
- [3] 黒澤豊；誘電体球状共振器の共振特性に関する研究”，宇都宮大学教育教育学研究科修士論文，(2005)
- [4] T. Onodera, M. Matsubara, Y. Kogami and Y. Tomabechi, " Millimeter-wave Permittivity Measurements for low-loss dielectric materials using WG mode spherical resonators," 2004 China-Japan Joint Meeting on Microwaves, Proceeding of CJMW '2004, pp.70-73. (Harbin , China), (2004)
- [5] 松原 真理，古神 義則，苔米地 義郎，“ウィスパリングギャラリーモード誘電体球状共振器の共振特性,” 信学論（C），vol.J88-C，No.2，pp. 124-125，(2005)
- [6] M. Tsuji, H. Shigesawa, H. Aoki and K. Takiyama, "Analytical and experimental considerations on the resonant frequency and the quality factor of dielectric resonators, " IEEE Trans. Microwave theory and Tech., vol.MTT-30, no.11, pp.1952-1958, (1982)